

پایایی نسبت به واحد در متغیرهای کمکی مدل‌های شعاعی

احمد عباسی *، فارغ-التحصیل کارشناسی ارشد دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، abbasi.ahad.65@gmail.com

جعفر پورمحمود، عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، Pourmahmoudj@yahoo.com

چکیده: در تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌های شعاعی در مولفه‌های شعاعی خود دارای خاصیت پایایی نسبت به واحد اندازه‌گیری هستند ولی این ویژگی برای متغیرهای کمکی برقرار نیست. در این مقاله مدلی معرفی می‌شود که در آن ویژگی فوق برای متغیرهای کمکی نیز برقرار باشد. این مدل ترکیبی از مدل‌های شعاعی و مدل غیر شعاعی SBM است.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها- پایایی نسبت به واحد- مدل‌های شعاعی

مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یکی از ابزارهای مفید و کارآمد در زمینه ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری است. دو مدل CCR و BBC از مدل‌های شعاعی هستند که در مولفه‌های شعاعی خود دارای خاصیت پایایی نسبت به واحد اندازه‌گیری هستند. پایایی نسبت به واحد ویژگی مهمی است که این مفهوم را می‌رساند که جواب مدل از واحد اندازه‌گیری داده‌ها مستقل باشد. این ویژگی برای متغیرهای کمکی مدل‌های شعاعی ذکر شده برقرار نیست. مدل غیرشعاعی SBM مدلی پایا نسبت به واحد اندازه‌گیری است که در آن متغیرهای کمکی نیز دارای این خاصیت هستند. در این مقاله مدلی را معرفی می‌کنیم که با استفاده از ترکیب مدل SBM با مدل‌های شعاعی، بدست آمده و تماماً پایاست.

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta - \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^p s_r^+ \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1, \dots, p \\ & \lambda_j, s_i^-, s_r^+ > 0 \end{aligned}$$

متوجه می‌شویم که حداقل با تغییر واحد اندازه‌گیری یکی از داده‌ها، توسط ضرب کردن در یک عامل مثبت، تابع هدف در مجموع متغیرهای کمکی مستقل از این تغییر نیست و جواب قبلی دیگر بهینه نبوده و بایستی مدل دوباره حل شود. در مدل شعاعی BCC نیز همین مشکل وجود دارد. قیود این مدل‌ها نسبت به تغییر واحد اندازه‌گیری پایا هستند در صورتیکه تابع هدف برای مجموع متغیرهای کمکی پایا نیست.

پایایی نسبت به واحد

در این بخش مفهوم پایایی نسبت به واحد را بیان و پایایی مولفه‌های این مدل‌های شعاعی را بررسی می‌کنیم.

تعریف: مدلی که جواب بهینه آن مستقل از واحد اندازه‌گیری داده‌ها باشد و با تغییر واحد جواب تغییر نکند گوییم نسبت به واحد پایاست.

با توجه به تابع هدف مدل CCR که در ذیل آمده است:

مدل غیرشعاعی SBM

در این قسمت مدل غیرشعاعی SBM به اختصار توضیح داده و خاصیت پایایی نسبت به واحد را برای این مدل بررسی می‌کنیم. این مدل کسری به صورت:

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho = \frac{1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{p} \sum_{r=1}^p \frac{s_r^+}{y_{ro}}} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1, \dots, p \\ & \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \end{aligned}$$

است. با توجه به نوع تابع هدف و اینکه متغیرهای کمکی به صورت $\frac{s_i^-}{x_{io}}, \frac{s_r^+}{y_{ro}}$ در تابع هدف ظاهر شده‌اند، علاوه بر قیود تابع هدف نیز نسبت به تغییر واحد اندازه‌گیری پایاست.

مدل ترکیبی

در این قسمت مدلی را پیشنهاد می‌کنیم که در تمامی مؤلفه‌های خاصیت پایایی نسبت به واحد را داراست. این مدل در واقع ترکیبی از مدل‌های شعاعی و مدل غیرشعاعی SBM هست که فرم پوششی آن در حالت ورودی محور به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta \\ \max \quad & \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{x_{io}} \\ \max \quad & \sum_{r=1}^p \frac{s_r^+}{y_{ro}} \\ \text{s.t.} \quad & \theta(x_{io} - s_i^-) = \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j, \quad i = 1, \dots, m \\ & y_{ro} = \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+, \quad r = 1, \dots, p \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \theta, \lambda_j, s_i^-, s_r^+ \geq 0 \end{aligned}$$

امتیاز این مدل نسبت به مدل‌های سنتی CCR و BCC، این است که پایای کامل است. یعنی علاوه بر مؤلفه‌های شعاعی متغیرهای کمکی نیز نسبت به واحد پایا هستند که در ذیل این مطلب اثبات می‌شود.

فرض کنید s^* جواب بهینه متناظر با داده v (ورودی x_{io} یا خروجی y_{ro}) مدل فوق باشد. دقت شود که s^* و v دارای واحد اندازه‌گیری یکسانی هستند. پایایی نسبت به واحد توابع هدف مرحله دوم و سوم بررسی می‌شود. نسبت $\frac{s^*}{v}$ را برای هر داده در نظر بگیرید. اگر واحد اندازه‌گیری با ضرب یک فاکتور مثبت مانند w عوض شود، چون s^* و v هر دو دارای واحد یکسانی هستند. پس $\frac{s^* w}{v w}$ به $\frac{s^*}{v}$ ساده می‌شود که همان جواب قبلی است.

لذا تغییر واحد هر داده (ورودی و خروجی) تاثیری در جواب بهینه ندارد و مدل نسبت به واحد پایاست.

نتایج

همان‌طور که دیدیم مدل‌های شعاعی سنتی DEA در مؤلفه‌های شعاعی خود نسبت به واحد پایا بودند ولی این خاصیت برای متغیرهای کمکی برقرار نبود. در مدل ترکیبی با استفاده از نسبت متغیرهای کمکی بر مؤلفه‌های متناظرشان در تابع هدف، واحد اندازه‌گیری را حذف کرده و مدل را نسبت به واحد پایا می‌کند که متغیرهای کمکی تولید شده در این مدل نیز نسبت به واحد پایا هستند. این مدل در واقع ترکیبی از مدل غیرشعاعی SBM و مدل‌های شعاعی پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها است. این مدل، مدلی جهت دار است یعنی هم در ماهیت ورودی و هم در ماهیت خروجی بررسی می‌شود این خاصیت یک امتیاز برای مدل محسوب می‌شود.

مراجع

- [1] Charnes A, Cooper WW, Rhodes E. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research* 2, (6), (1978): 429-44.
- [2] Barak Edelstein, Joseph C. Paradi. Ensuring units invariant slack selection in radial data envelopment analysis models, and incorporating slacks into an overall efficiency score. *Omega – The International Journal of Management Science* 41, (2013): 31-40.



هشتمین کنفرانس ملی تحلیل پوششی داده ها
۱۳ و ۱۴ مردادماه ۱۳۹۵
دانشگاه آزاد اسلامی واحد اردبیل



[3] Tone K. A slacks-based measure of efficiency in data envelopment analysis. *European journal of operational research* 130, (3), (2001):498–509.